

**AN ONLINE AND OPEN ACCESS PRE-CALCULUS  
COURSE (MOOC) IN SWEDISH**

**PLATFORM MATERIALS IMPLEMENTED IN STACK**

**Question 1:**

Undersök med hjälp av GeoGebra hur grafen till andragradsfunktionen

$$f(x) = k(x + a)^2 + b,$$

beror av värdena på parametrarna  $a$ ,  $b$  och  $k$ .

---

Genomför följande i GeoGebra.

- Mata in  $g(x) = x^2$  i inmatningsfältet. Funktionen  $g(x) = x^2$  används som en basfunktion (referensfunktion).
  - Mata in  $f(x) = k(x + a)^2 + b$  i inmatningsfältet. En glidare skapas för var och en av parametrarna. **OBS!** Det är viktigt att inte utelämna  $*$ .
  - Undersök, genom att dra i respektive glidare, hur de olika parametrarna påverkar grafens utseende. Jämför med basfunktionen.
- 

a) Beskriv hur de olika parametrarna påverkar grafens utseende.

**Gruppgemensamt svar:**

\_\_\_\_\_

---

b) Tänk efter vilka andragradsfunktioner som har punkten  $(-1, -2)$  som minimipunkt. Använd därefter GeoGebra för att testa om detta stämmer. När ni är övertygade om att ert antagande stämmer ska ni ange två olika andragradsfunktioner som uppfyller villkoret.

**Gruppgemensamma svar:**

$$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$h(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

---

c) Beskriv en generell metod för att bestämma värdena på parametrarna  $a$ ,  $b$  och  $k$  i funktionen  $f(x) = k(x + a)^2 + b$ , när funktionens graf är given.

**Gruppgemensamt svar:**

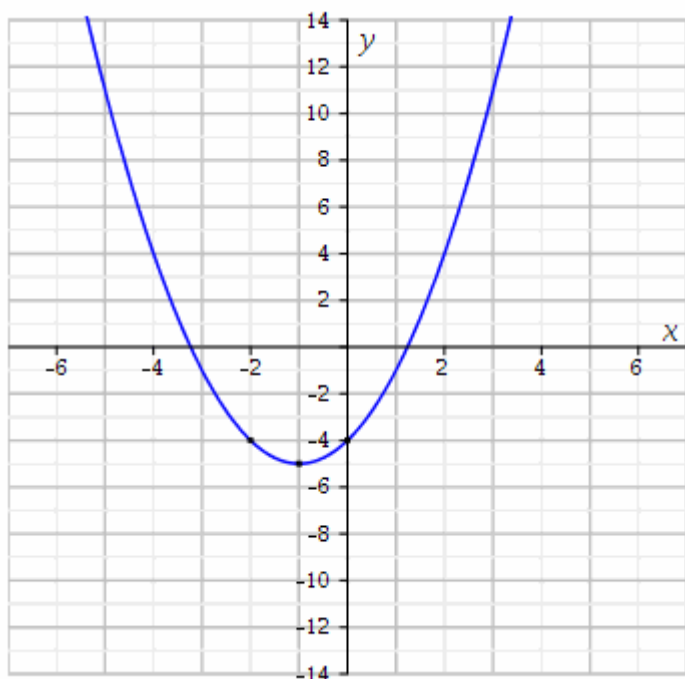
\_\_\_\_\_

---

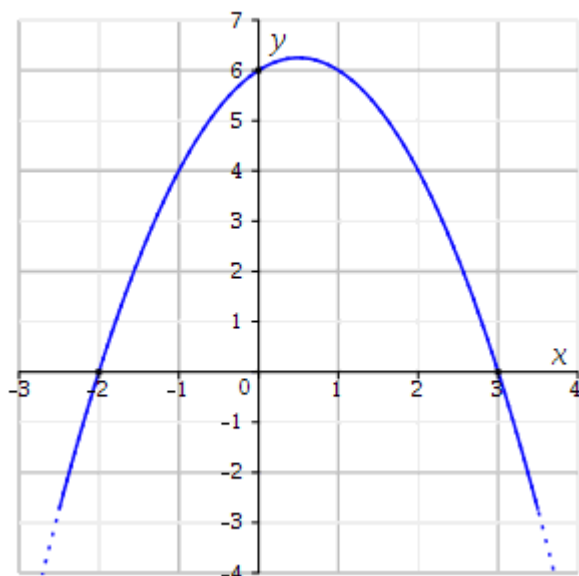
d) Skissen nedan visar grafen  $y = f(x)$  till en andragradsfunktion  $f$ . Använd metoden ni beskrivit i deluppgift c) för att bestämma  $f$ . Testa genom att mata in funktionsformeln i GeoGebra innan ni matar in den som svar på uppgiften här.

**OBS!** Ni har (troligtvis) fått olika grafer.

**Enskilt svar:**  $f(x) =$  \_\_\_\_\_



e) Skissen nedan visar grafen  $y = h(x)$ , där  $h$  är en andragradsfunktion. För att bestämma  $h$  är metoden ni använde i föregående deluppgift mindre lämplig.



Utnyttja istället funktionens nollställen för att bestämma funktionsformeln. Använd GeoGebra för att testa om ni har kommit fram till rätt formel.

i) Ange funktionsformeln.

**Gruppgemensamt svar:**  $h(x) =$  \_\_\_\_\_

ii) Beskriv hur ni gick tillväga för att bestämma funktionsformeln.

**Gruppgemensamt svar:**

\_\_\_\_\_

---

**Question 2:**

Nedan följer ett antal tänkbara egenskaper (i) - (iv) hos en polynomfunktion  $p$ .

- (i)  $p$  är av gradtal tre, dvs.  $p(x)$  är en tredjegradsfunktion
- (ii)  $p(-3) = 0$
- (iii)  $p(5) = 0$
- (iv)  $p(0) = 30$

**OBS!** Ni har (troligtvis) fått olika egenskaper.

**OBS!** Tänk på möjligheten att testa era svar i GeoGebra.

**Enskilda svar:**

a) Ge ett exempel på en polynomfunktion  $p$  som uppfyller (i).

$p(x) =$  \_\_\_\_\_

b) Ge ett exempel på en polynomfunktion  $p$  som uppfyller (i) och (ii).

$p(x) =$  \_\_\_\_\_

c) Ge ett exempel på en polynomfunktion  $p$  som uppfyller (i), (ii) och (iii).

$p(x) =$  \_\_\_\_\_

d) Ge ett exempel på en polynomfunktion  $p$  som uppfyller samtliga egenskaper (i) - (iv).

$p(x) =$  \_\_\_\_\_

e) Ge exempel på två olika polynomfunktioner som uppfyller (ii), (iii) och (iv) men inte (i).

$p(x) =$  \_\_\_\_\_

$p(x) =$  \_\_\_\_\_

---

---

**Question 3:**

Undersök med hjälp av GeoGebra hur grafen till den trigonometriska funktionen

$$f(x) = A \sin(B(x + C)) + D,$$

beror av värdena på parametrarna  $A$ ,  $B$ ,  $C$  och  $D$ .

---

Genomför följande i GeoGebra.

- Mata in  $g(x) = \sin(x)$  i inmatningsfältet. Funktionen  $g(x) = \sin(x)$  används som basfunktion.
  - Mata in  $f(x) = A \cdot \sin(B \cdot (x + C)) + D$  i inmatningsfältet.
  - Undersök, genom att dra i respektive glidare, hur de olika parametrarna påverkar grafens utseende. Jämför med basfunktionen.
- 

a) Beskriv hur de olika parametrarna påverkar grafens utseende.

**Gruppgemensamt svar:**

\_\_\_\_\_

---

b) Tänk efter vad som måste vara uppfyllt för att en trigonometrisk funktion ska ha värdemängden  $-4 \leq y \leq 2$ . Använd därefter GeoGebra för att testa om detta stämmer. När ni är övertygade om att ert antagande stämmer ska ni ange två olika trigonometriska funktioner som uppfyller villkoret.

**Gruppgemensamt svar:**

\_\_\_\_\_

---

c) Diskutera i gruppen hur grafen  $y = h(x)$  till en trigonometrisk funktion  $h(x) = A \sin(B(x + C)) + D$  kan användas för att bestämma värdena på parametrarna  $A$ ,  $B$ ,  $C$  och  $D$ .

Figuren nedan visar  $y = p(x)$  /heldragen/ och  $y = q(x)$  /streckad/. Använd era slutsatser från diskussionen för att bestämma  $p$  och  $q$ . Testa i GeoGebra innan ni matar in era svar på uppgiften.

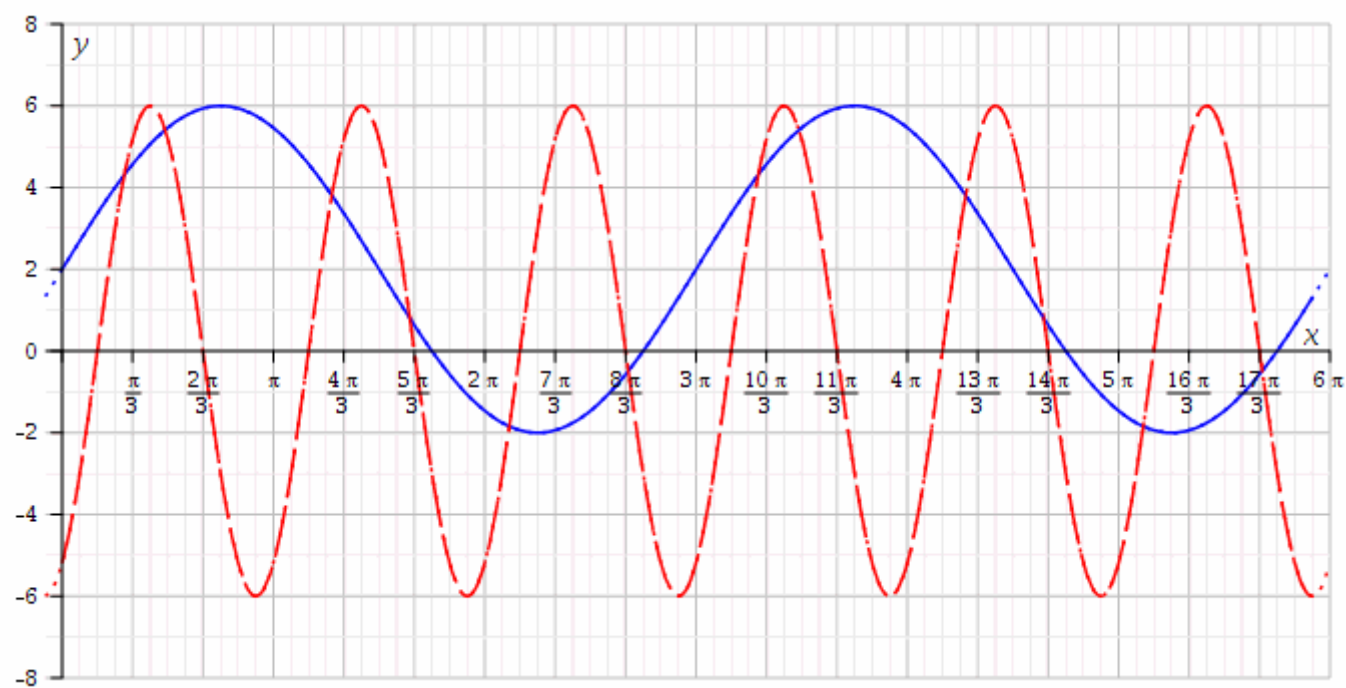
**OBS!** Ni har (troligtvis) fått olika grafer.

**Enskilda svar:**

$$p(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$q(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

---



**Question 4:**

Ange funktionsformeln för den linjära funktionen  $g$  som uppfyller villkoren

$$g(4) = -3 \quad \text{och} \quad g^{-1}(3) = 1.$$

**Gruppgemensamt svar:**

$$g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

---

Använd "Verify"-knappen nedan, för att kolla om ert svar är korrekt. Om svaret är fel så får ni lite tips.

Därefter får ni en ny chans att svara på uppgiften.

**OBS:** Efter ni har tryckt på "Verify"-knappen går svaret inte att ändra!

---

Det verkar inte som ert svar överensstämmer med det korrekta svaret.

För att bestämma funktionsformeln behöver man inse vilken punkt  $g^{-1}(3) = 1$  motsvarar.

Använd det allmänna sambandet  $g^{-1}(b) = a \Leftrightarrow g(a) = b$  för att bestämma punkten och gör ett nytt försök!

---

Ange formeln för den linjära funktionen  $g$  som uppfyller villkoren

$$g(4) = -3 \quad \text{och} \quad g^{-1}(3) = 1.$$

**Gruppgemensamt svar:**

$$g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

---

**Question 5:**

Skissen nedan visar grafen  $y = f(x)$ , där  $f$  är en given funktion.

Använd grafen för att besvara frågorna a) - d). Avrunda till närmaste heltal.

**OBS!** Ni har (troligtvis) fått olika grafer.

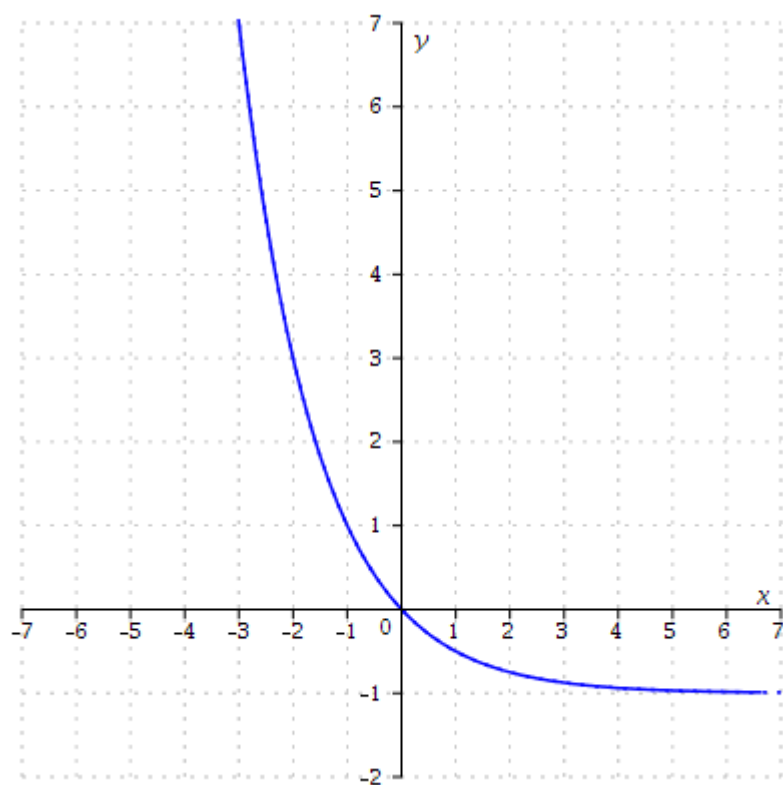
**Enskilda svar:**

a)  $f^{-1}(3) =$  \_\_\_\_\_

b)  $f(-2) =$  \_\_\_\_\_

c)  $f^{-1}(f(-2)) =$  \_\_\_\_\_

d)  $f(f^{-1}(3)) =$  \_\_\_\_\_



**Question 6:**

För  $x > 0$ , låt  $f(x) = e^{-2x}$ ,  $g(x) = \frac{1}{e^{-2x}}$  och  $h(x) = -\frac{1}{2} \ln(x)$ .

Bestäm följande sammansatta funktioner. Förenkla era svar så långt som möjligt.

**Gruppgemensamma svar:**

a)  $(f \circ g)(x) = f(g(x)) =$  \_\_\_\_\_

b)  $(f \circ h)(x) = f(h(x)) =$  \_\_\_\_\_

c)  $(h \circ f)(x) = h(f(x)) =$  \_\_\_\_\_

---

**Question 7:**

För  $x > 0$ , låt  $f$ ,  $g$  och  $h$  vara funktionerna i den föregående uppgiften, dvs.

$$f(x) = e^{-2x}, \quad g(x) = \frac{1}{e^{-2x}} \quad \text{och} \quad h(x) = -\frac{1}{2} \ln(x).$$

Vilket/vilka av följande påståenden stämmer?

**Gruppgemensamma svar:**

- (a)  $f$  och  $g$  är varandras inverser.
- (b)  $f$  och  $h$  är varandras inverser.
- (c)  $g$  och  $h$  är varandras inverser.
- (d) Inga av  $f$ ,  $g$  eller  $h$  är varandras inverser.

Använd "Verify"-knappen nedan, för att kolla om ert svar är korrekt.

**OBS:** Efter ni har tryckt på "Verify"-knappen går svaret inte att ändra!

---

Ert svar stämmer inte. Det är  $f$  och  $h$  som är varandras inverser.

---

**Question 8:**

Att funktionerna  $f(x) = e^{-2x}$  och  $h(x) = -\frac{1}{2} \ln(x)$ ,  $x > 0$  är varandras inverser kan visas på olika sätt. Markera **samtliga** möjliga sätt nedan.

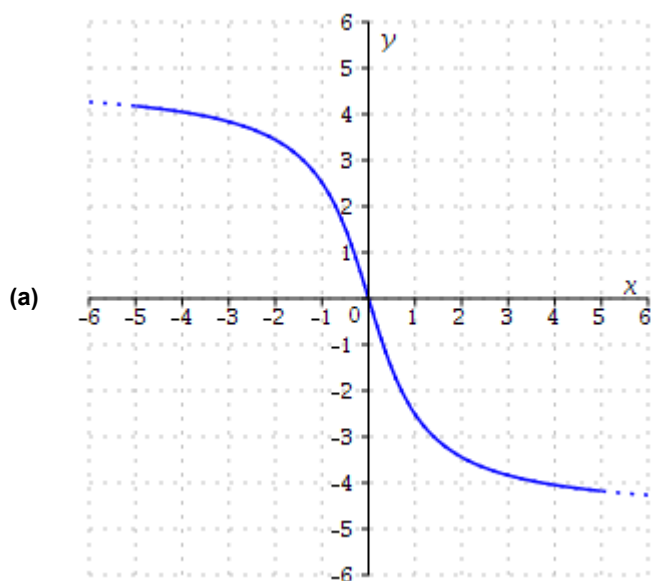
**Gruppgemensamma svar:**

- (a) Visa att  $(f \circ h)(x) = x$  och  $(h \circ f)(x) = x$ .
- (b) Visa att graferna till  $f$  och  $h$  är varandras speglingar i  $y$ -axeln.
- (c) Visa att graferna till  $f$  och  $h$  är varandras speglingar i linjen  $y = x$ .
- (d) Genom att lösa ut  $x$  ur  $y = f(x)$  och jämföra med  $h$ .
- (e) Visa att  $h = \frac{1}{f}$ .

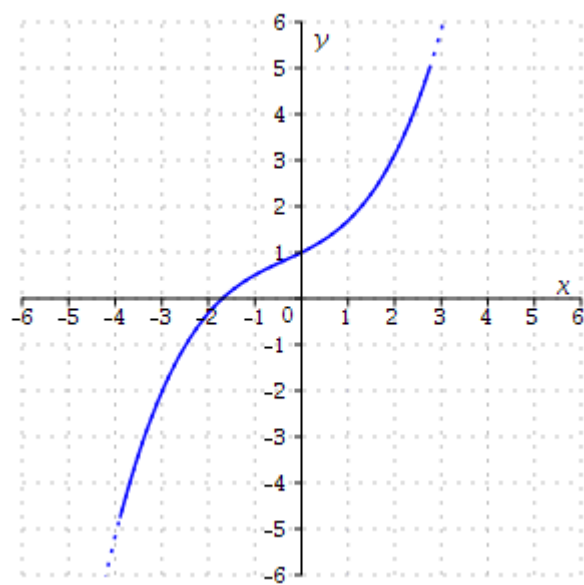
**Question 9:**

a) Nedan visas graferna till några olika funktioner. Funktionerna har  $\mathbb{R}$  som definitionsmängd. Markera de funktioner som är inverterbara.

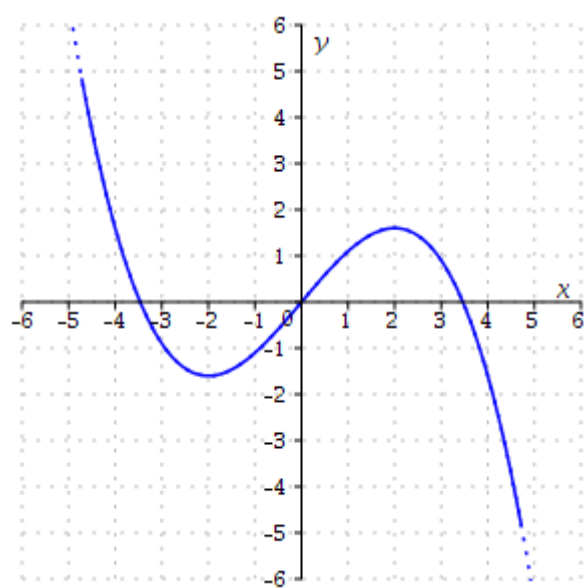
**Gruppgemensamt svar:**



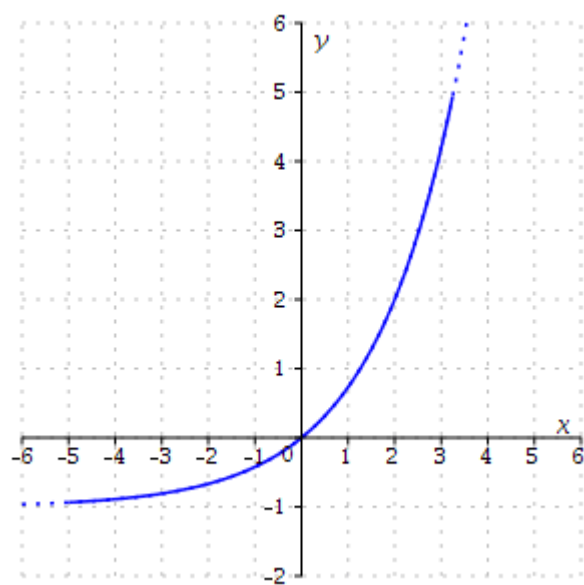
(b)

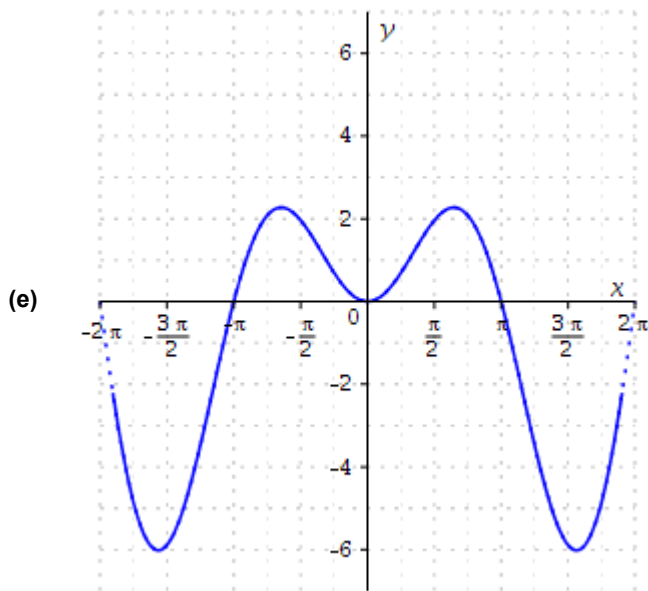


(c)

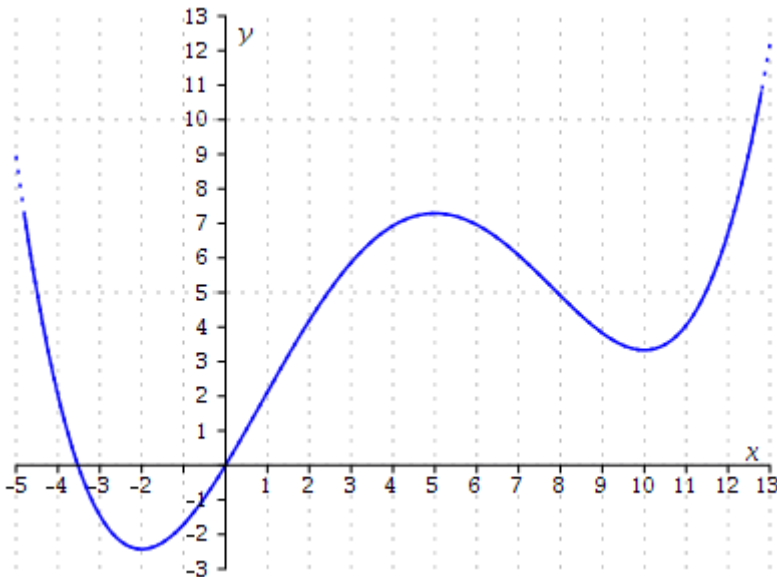


(d)





b) Skissen nedan visar grafen  $y = f(x)$ , där  $f$  är ett fjärdegradspolynom och definitionsmängden är  $\mathbb{R}$ .



Funktionen är inte inverterbar om definitionsmängden inte begränsas. Markera de begränsningar av definitionsmängden som gör att funktionen blir inverterbar?

**OBS!** Ni har (troligtvis) fått olika grafer.

**Enskilt svar:**

- (a)  $-2 \leq x \leq 10$
- (b)  $x \geq 10$
- (c)  $x \leq 5$
- (d)  $5 \leq x \leq 10$
- (e)  $x \geq 5$
- (f)  $x \leq -2$
- (g)  $-2 \leq x \leq 5$
- (h) Inget av ovanstående alternativ.

---

**Question 10:**

*Syftet med uppgiften är att studera inversen till några olika funktioner.*

---

a) Vi börjar med funktionen  $f(x) = \ln(2x + 5)$  som utgångspunkt.

*Genomför följande i GeoGebra.*

- Rita kurvan  $y = f(x)$ , genom att mata in  $y = \ln(2x+5)$  i "Inmatningsfältet". Rita därefter in linjen  $y = x$  i samma fönster. **OBS!** För att kommande konstruktioner ska fungera är det viktigt att inte utelämna " $y =$ ".
- Spegla kurvan i linjen  $y = x$  med hjälp av speglingsverktyget . Spegelbilden visar kurvan  $y = f^{-1}(x)$ .
- Bestäm (nu utan hjälp av GeoGebra, dvs. med en algebraisk metod) inversen till  $f$ .
- Kontrollera därefter ert svar genom att mata in ert förslag till inversen i "Inmatningsfältet" och se om grafen sammanfaller med spegelbilden. Om inte, räkna om inversen tills det blir rätt.

**Gruppgemensamma svar:**

a) i) Ange ett funktionsuttryck för  $f^{-1}$ .

$$f^{-1}(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

ii) Bestäm definitionsmängden till  $f^{-1}$ . Markera det korrekta alternativet.

- (a)  $(-5/2, 5/2)$
- (b)  $(-\infty, -5/2)$
- (c)  $(-\infty, 5/2)$
- (d)  $(-2/5, \infty)$
- (e)  $(-5/2, \infty)$
- (f)  $\mathbb{R}$
- (g) Inget av dessa alternativ.

iii) Bestäm värdemängden till  $f^{-1}$ . Markera det korrekta alternativet.

- (a)  $(-\infty, 5/2)$
- (b)  $\mathbb{R}$
- (c)  $(-5/2, \infty)$
- (d)  $(-2/5, \infty)$
- (e)  $(-5/2, 5/2)$

- (f)  $(-\infty, -5/2)$
  - (g) Inget av dessa alternativ.
- 

b) Nu övergår vi till en exponentialfunktion där var och en i gruppen (troligtvis) får olika siffervärden. Genomför liknande konstruktion som i deluppgift a), med hjälp av GeoGebra, men nu med funktionen  $f(x) = -3 + e^{2x-3}$ .

**Enskilda svar:**

i) Ange ett funktionsuttryck för  $f^{-1}$ .

$$f^{-1}(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

ii) Bestäm definitionsmängden till  $f^{-1}$ . Markera det korrekta alternativet.

- (a)  $(-3, \infty)$
- (b)  $(-\infty, -3)$
- (c)  $\mathbb{R}$
- (d)  $(3/2, \infty)$
- (e)  $(-\infty, 3/2)$
- (f)  $(0, \infty)$
- (g) Inget av dessa alternativ.

iii) Bestäm värdemängden till  $f^{-1}$ . Markera det korrekta alternativet.

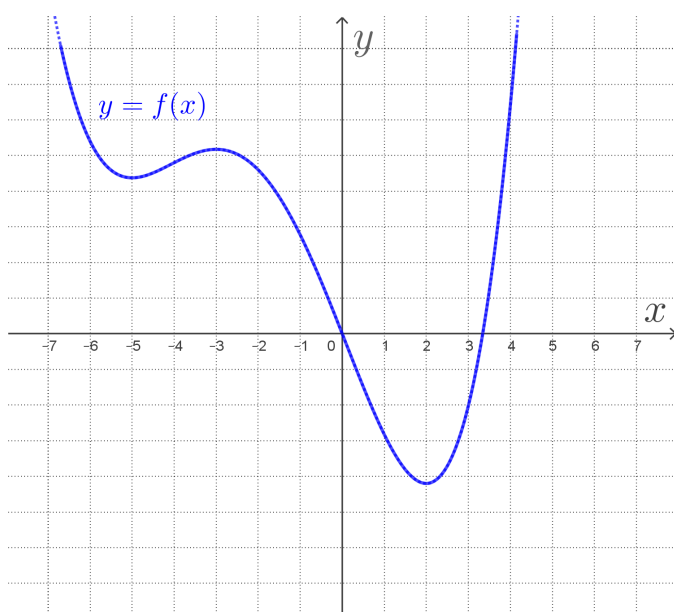
- (a)  $(-3, \infty)$
  - (b)  $(-\infty, -3)$
  - (c)  $\mathbb{R}$
  - (d)  $(3/2, \infty)$
  - (e)  $(-\infty, 3/2)$
  - (f)  $(0, \infty)$
  - (g) Inget av dessa alternativ.
- 
-

**Question 1:**

Uppgifterna 1 - 4 handlar huvudsakligen om sambandet mellan grafen till en given funktion och grafen till dess derivata.

---

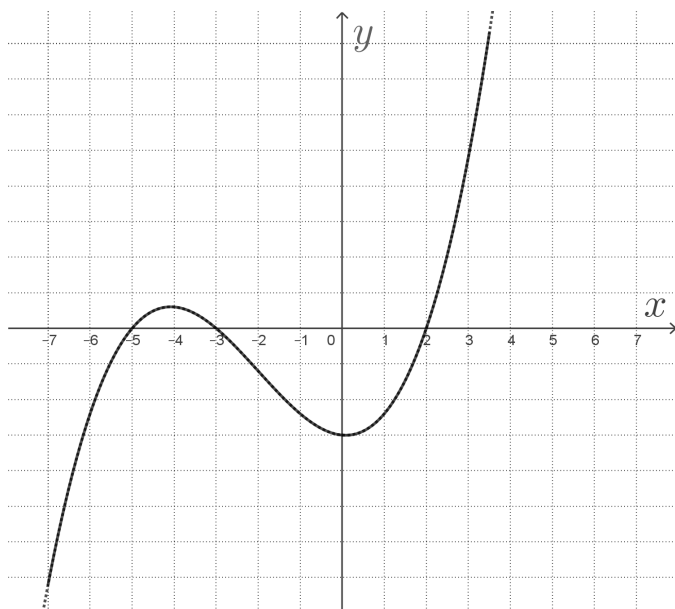
Skissen nedan visar kurvan  $y = f(x)$ , där  $f$  är en given funktion.



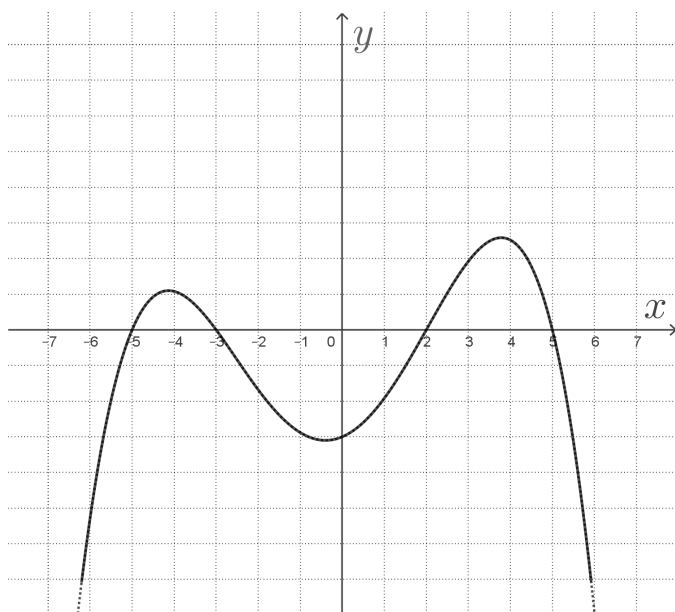
a) Vilken eller vilka av skisserna nedan visar grafen till förstaderivatan av  $f$ , dvs. kurvan  $y = f'(x)$ ? Markera det/de alternativ som är korrekt/a.

**Gruppgemensamt svar:**

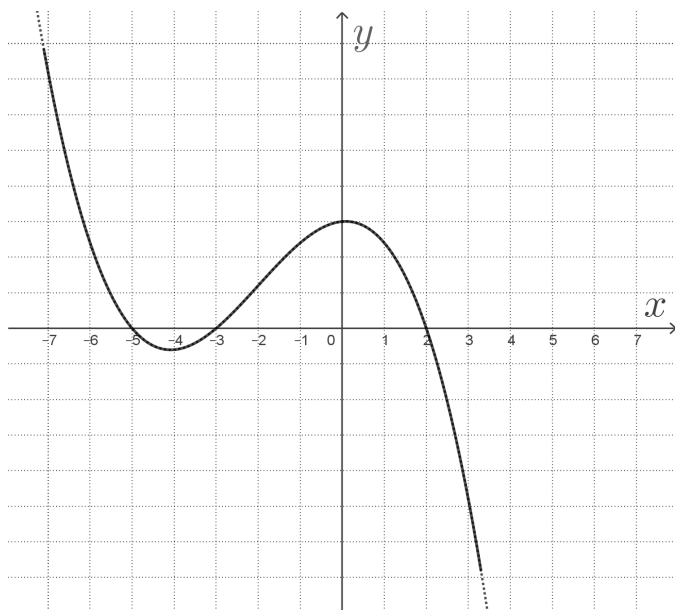
(a)



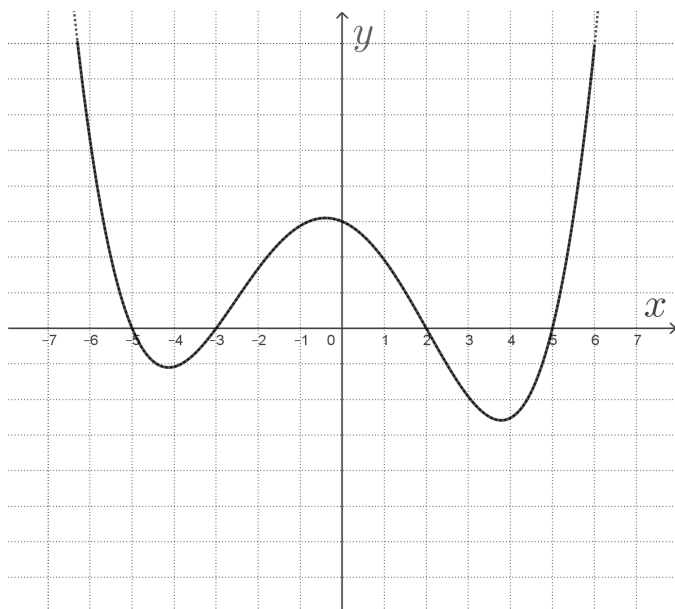
(b)



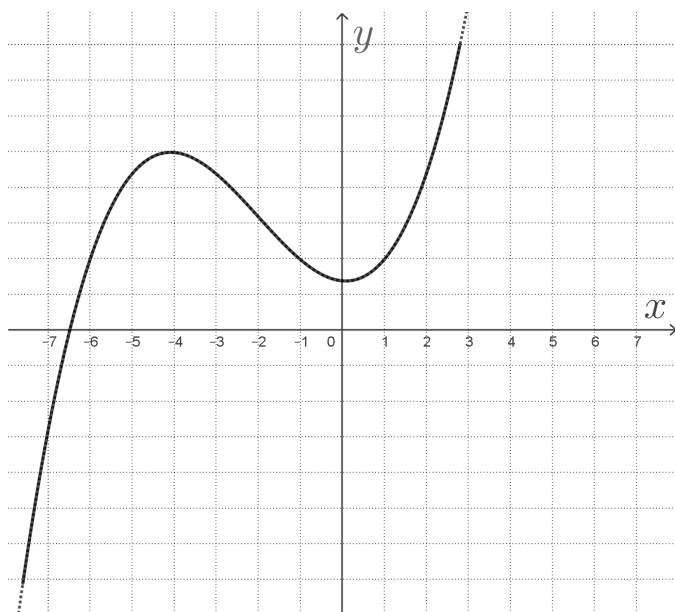
(c)



(d)



(e)



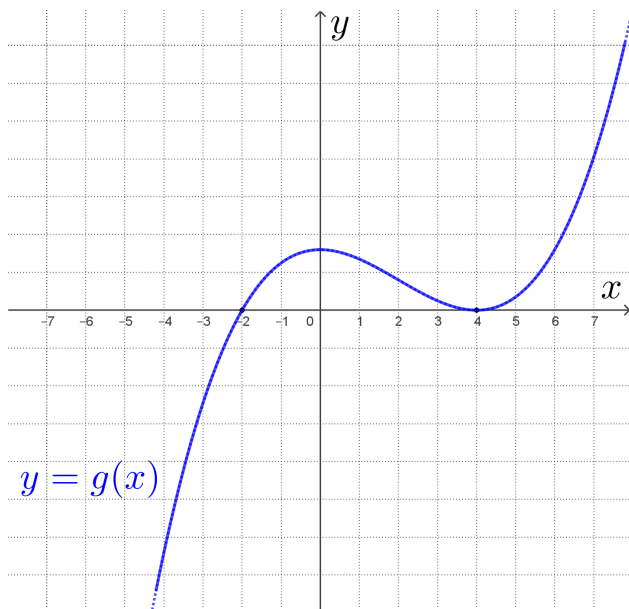
b) Beskriv hur ni gick tillväga för att komma fram till ert svar i deluppgift a).

**Gruppgemensamt svar:**

\_\_\_\_\_

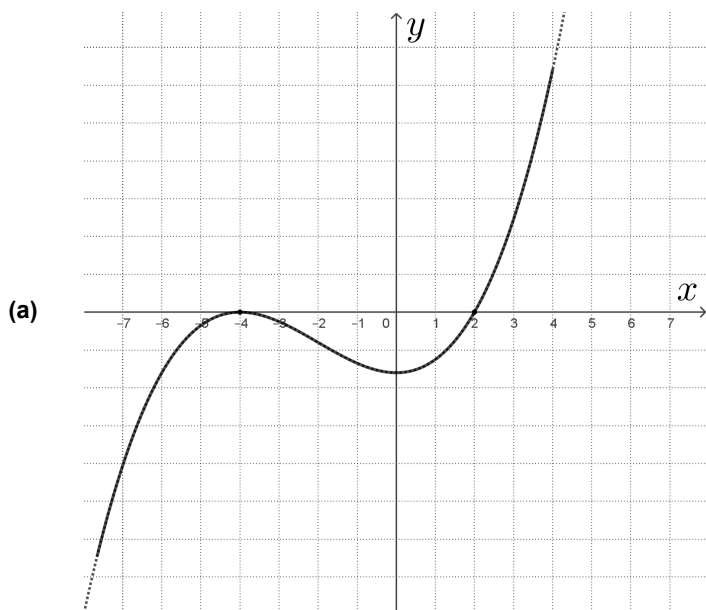
**Question 2:**

Skissen nedan visar kurvan  $y = g(x)$ , där  $g$  är en given funktion.

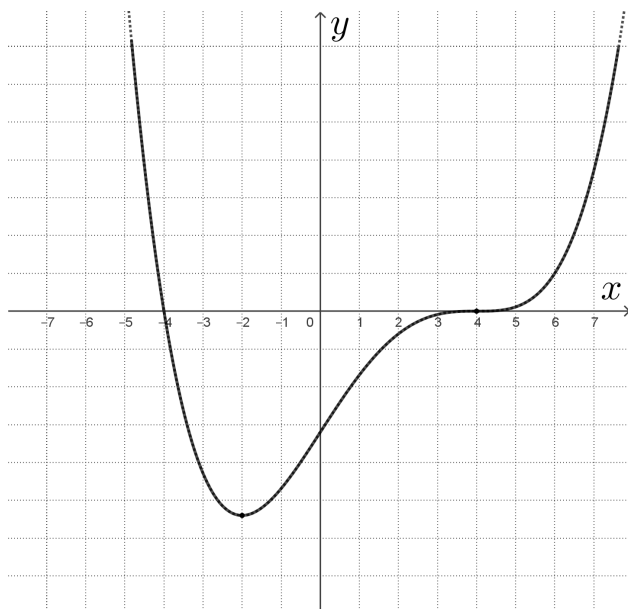


a) Vilken eller vilka av skisserna nedan visar grafen till en funktion som har  $g$  som förstaderivata? Markera det/de alternativ som är korrekt/a.

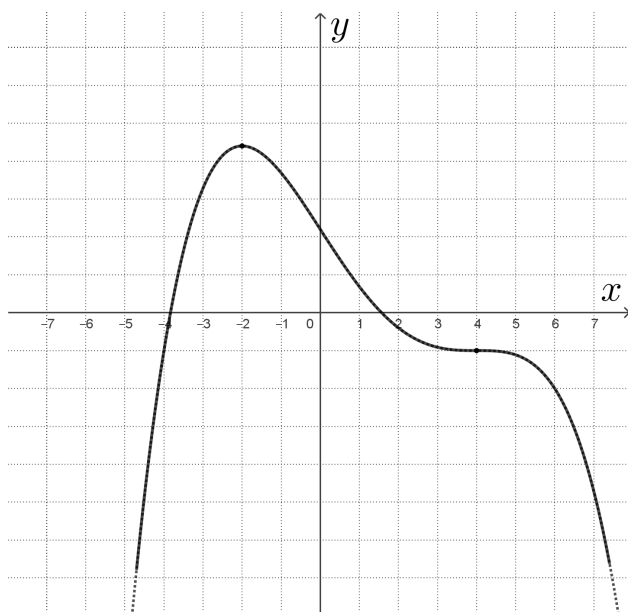
**Gruppgemensamt svar:**



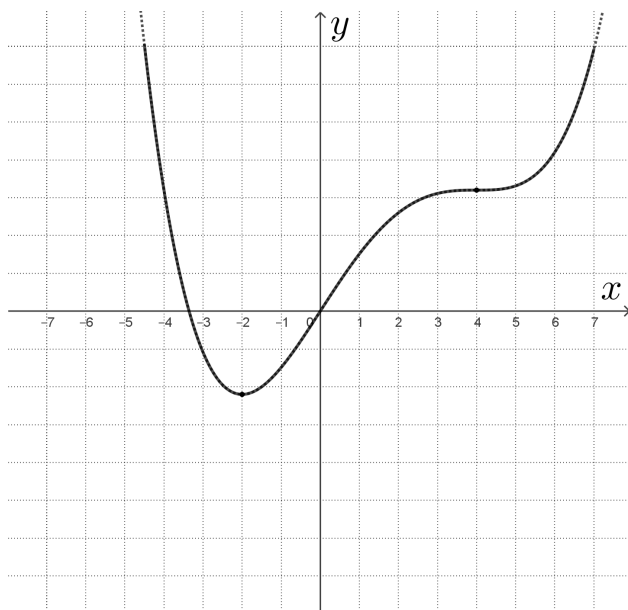
(b)



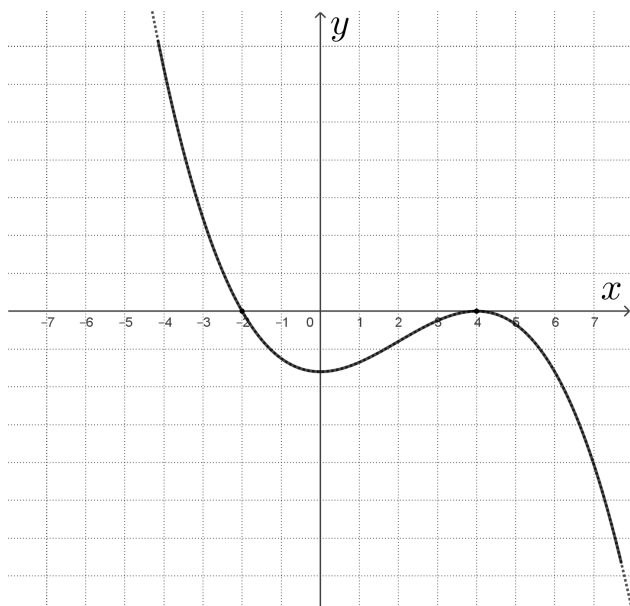
(c)



(d)



(e)



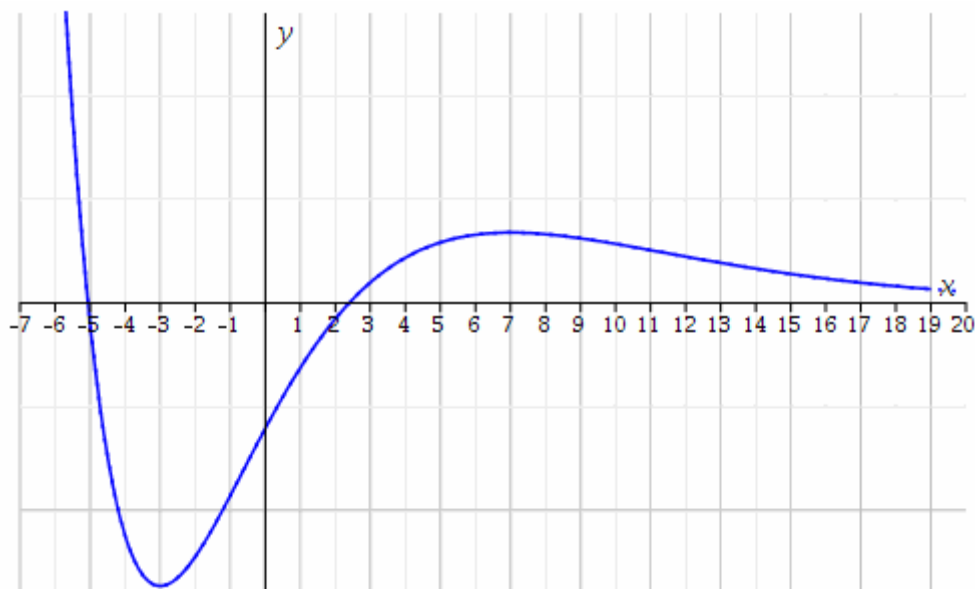
b) Beskriv hur ni gick tillväga för att komma fram till ert svar i deluppgift a).

Gruppgemensamt svar:

\_\_\_\_\_

Question 3:

Skissen nedan visar kurvan  $y = f(x)$ , där  $f$  är en given funktion.

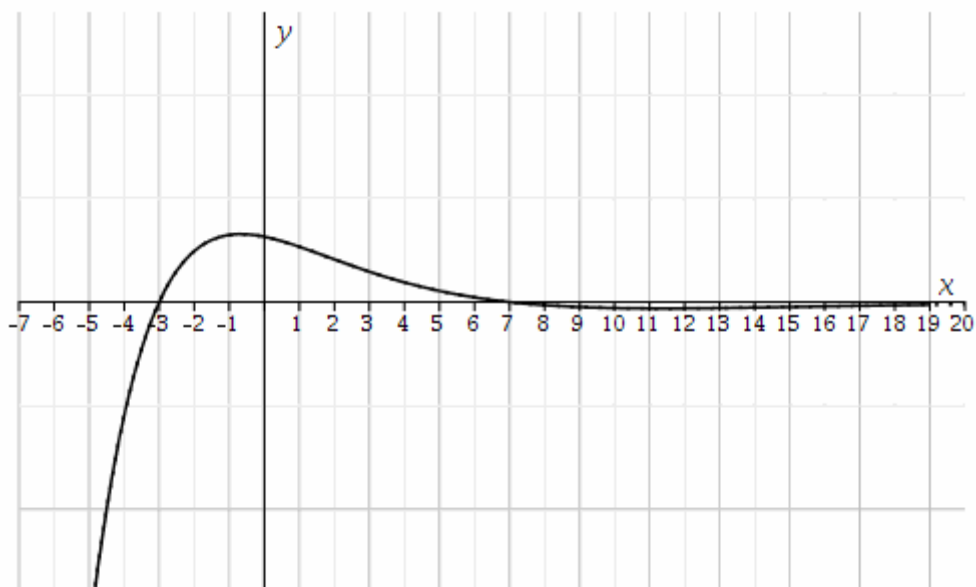


Vilken eller vilka av skisserna här nedan visar grafen till förstaderivatan av  $f$ , dvs. kurvan  $y = f'(x)$ ? Markera det/de alternativ som är korrekt/a.

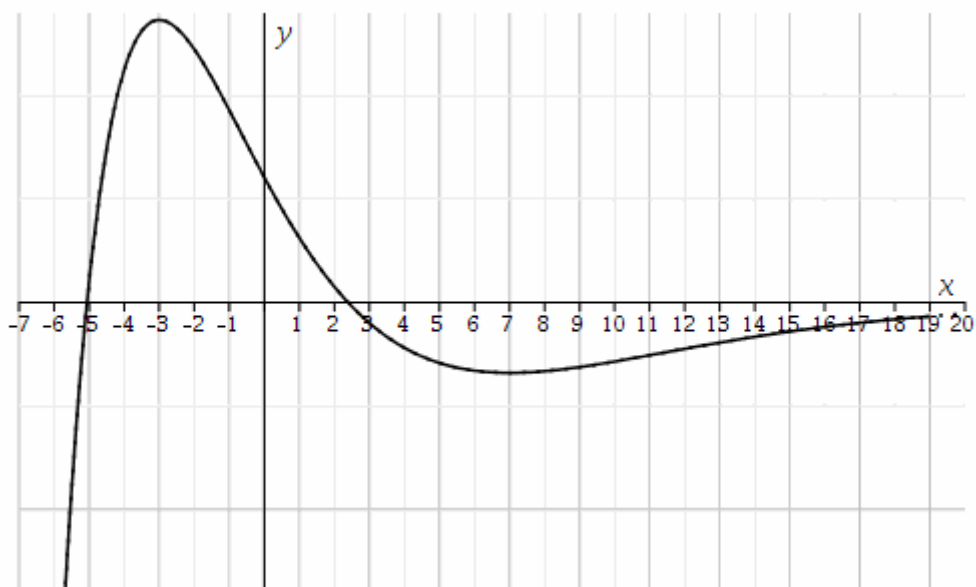
**OBS!** Ni har (troligtvis) fått olika grafer.

**Enskilt svar:**

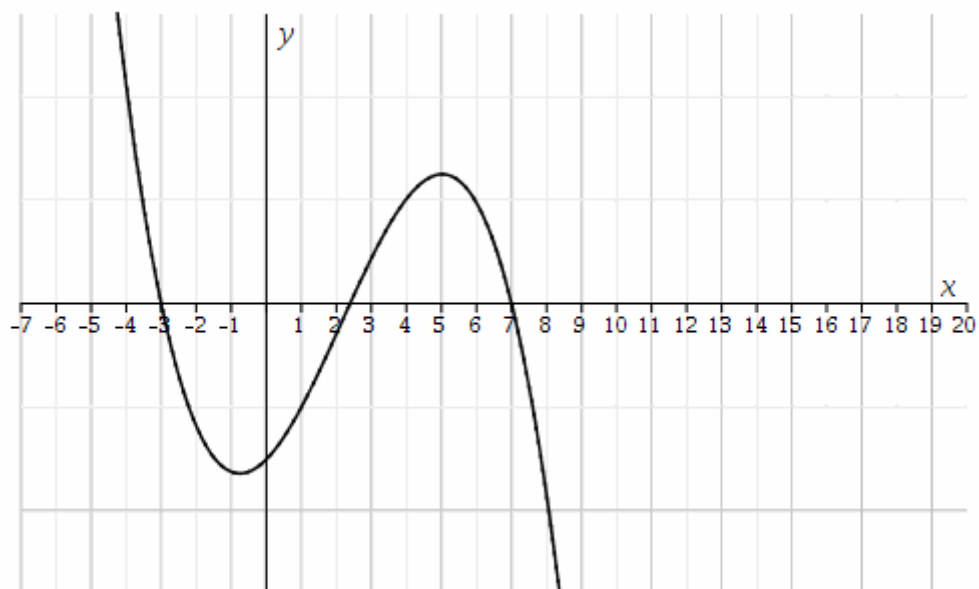
(a)



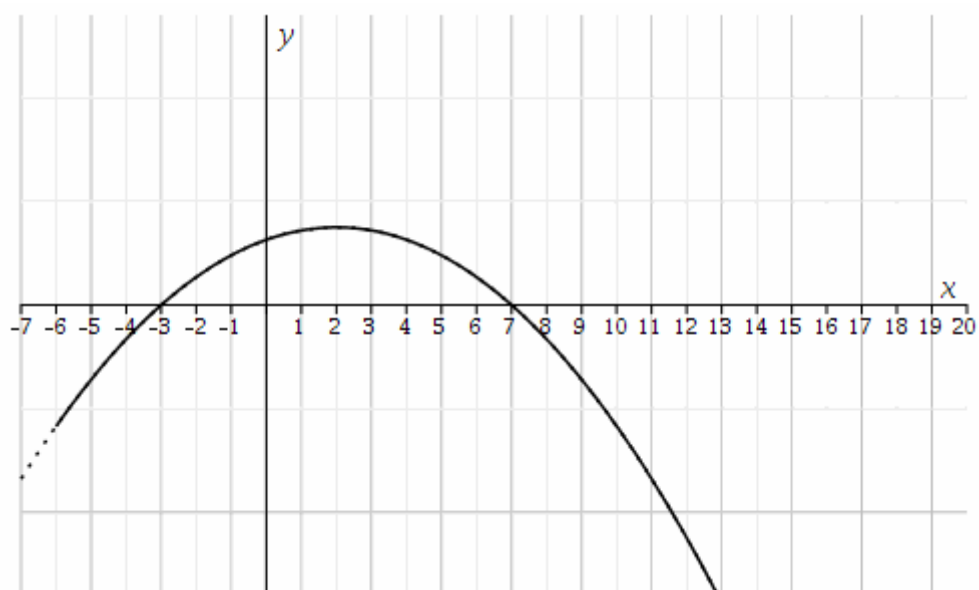
(b)



(c)

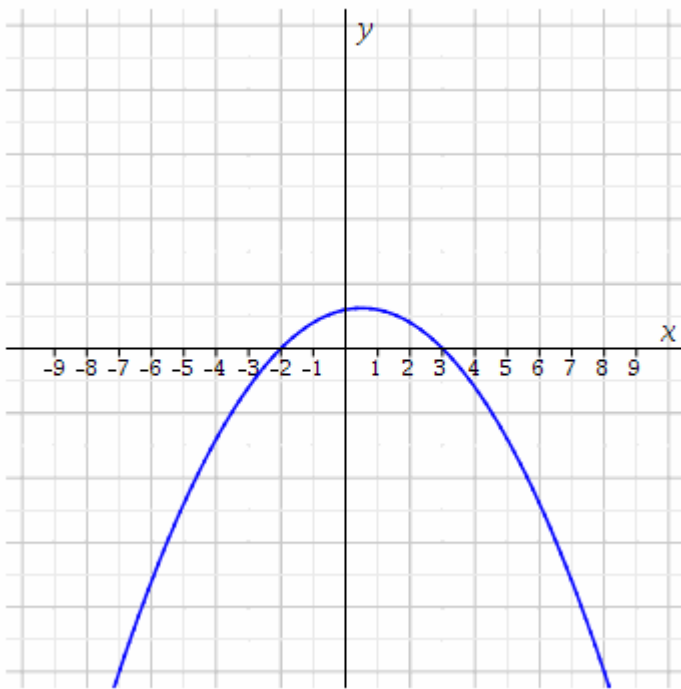


(d)



**Question 4:**

Skissen nedan visar kurvan  $y = g(x)$ , där  $g$  är en given funktion.

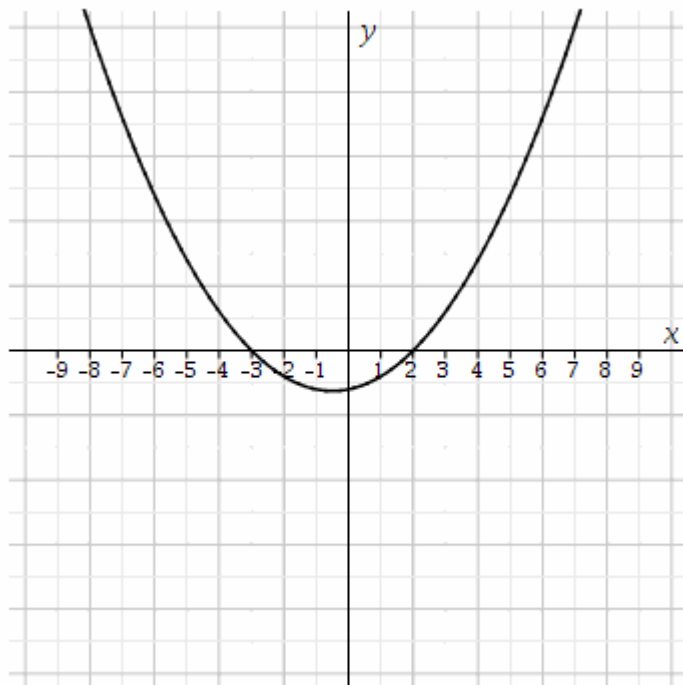


Vilken eller vilka av skisserna nedan visar grafen till en funktion som har  $g$  som förstaderivata? Markera det/de alternativ som är korrekt/a.

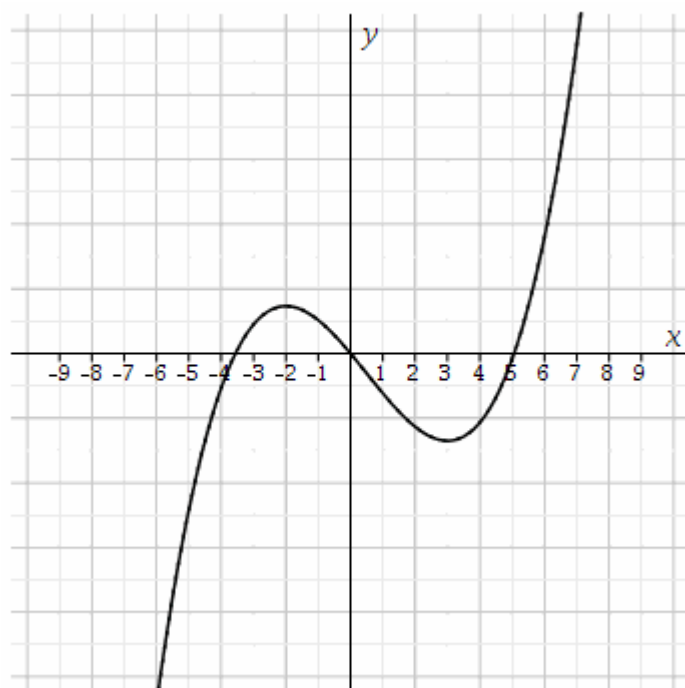
**OBS!** Ni har (troligtvis) fått olika grafer.

**Enskilt svar:**

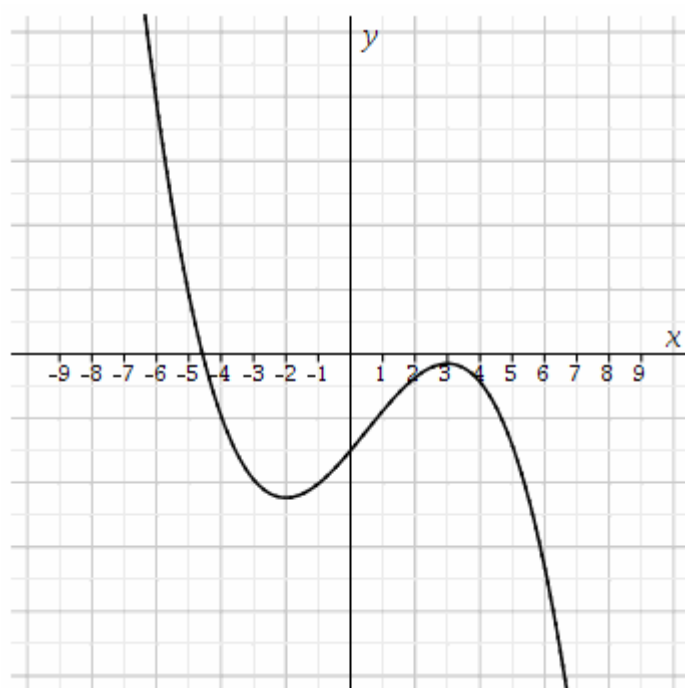
(a)



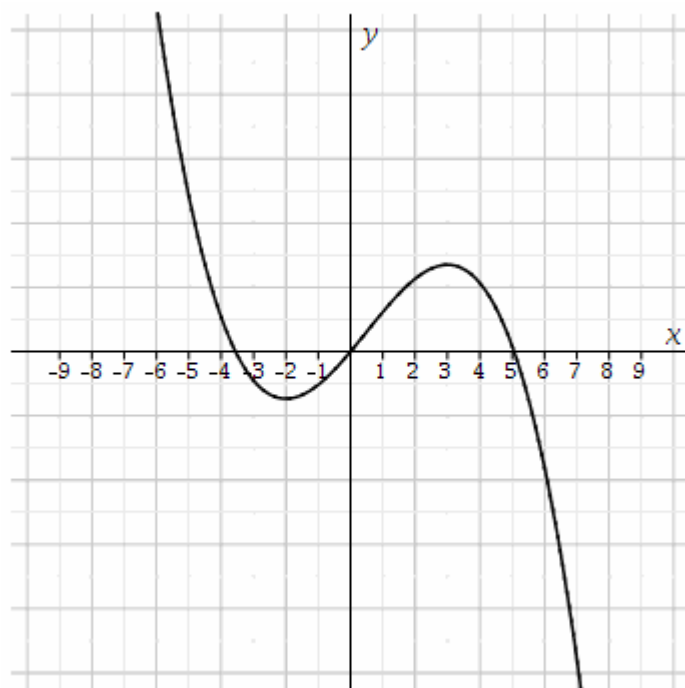
(b)



(c)



(d)

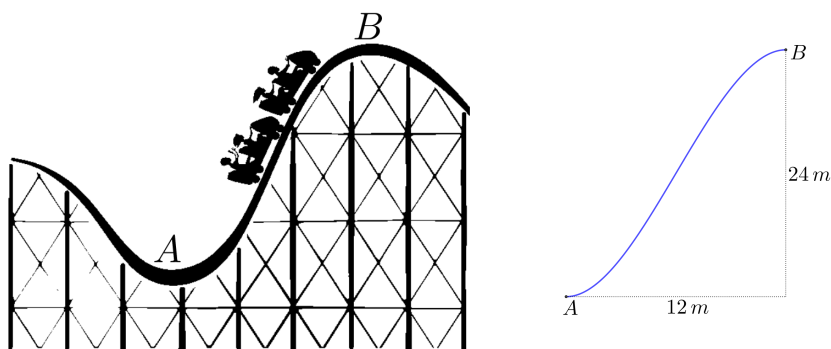


**Question 5:**

I uppgift 5 och 6 skall ni använda kunskaper från kursen för att lösa ett tillämpat problem.

Delar av en konstruktion i en berg- och dalbana behöver bytas ut. Det är delen mellan punkterna  $A$  och  $B$  (se figurerna nedan) som skall bytas ut. Er uppgift är att bestämma **en polynomfunktion**  $f$  som kan användas vid byggandet så att det blir en mjuk övergång i punkterna  $A$  och  $B$ .

- Utgå från måtten i skissen.
- Använd GeoGebra för att testa om ni kommit fram till en lämplig funktion innan ni matar in den som svar på uppgiften.



**Gruppgemensamt svar:**

$$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

Använd "Verify"-knappen nedan, för att kolla om ert svar är korrekt. Om svaret inte stämmer så får ni lite tips och en ny chans att svara på uppgiften.

**OBS:** Efter ni har tryckt på "Verify"-knappen går svaret inte att ändra!

Det verkar inte som ert svar stämmer .

- Börja med att placera punkterna  $A$  och  $B$  i ett koordinatsystem med punkten  $A$  i origo.
- Utnyttja villkoren att  $f(0) = 0$ ,  $f(12) = 24$ ,  $f'(0) = 0$  och  $f'(12) = 0$ .

Använd dessa tips och gör ett nytt försök!

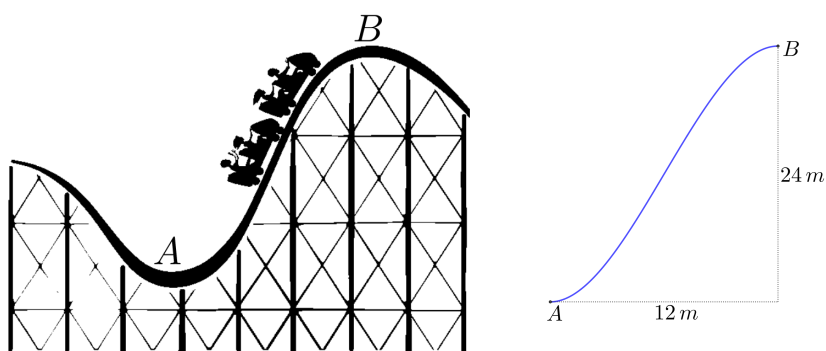
$$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

---

**Question 6:**

Ni ska nu lösa samma uppgift en gång till, men den här gången ska ni bestämma **en trigonometrisk funktion**  $g$  som kan användas vid byggandet så att det blir en mjuk övergång i punkterna  $A$  och  $B$ .

- Utgå från måtten i skissen.
- Använd GeoGebra för att testa om ni kommit fram till en lämplig funktion innan ni matar in den som svar på uppgiften.



---

**Gruppgemensamt svar:**

$$g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

Använd "Verify"-knappen nedan, för att kolla om ert svar är korrekt. Om svaret inte stämmer så får ni lite tips och en ny chans att svara på uppgiften.

**OBS:** Efter ni har tryckt på "Verify"-knappen går svaret inte att ändra!

---

Det verkar inte som ert svar stämmer.

- Börja med att placera punkterna  $A$  och  $B$  i ett koordinatsystem med punkten  $A$  i origo.
- Bestäm amplitud, periodlängd samt förskjutningar i  $x$ -led och  $y$ -led så att funktionen stämmer.

Använd dessa tips och gör ett nytt försök!

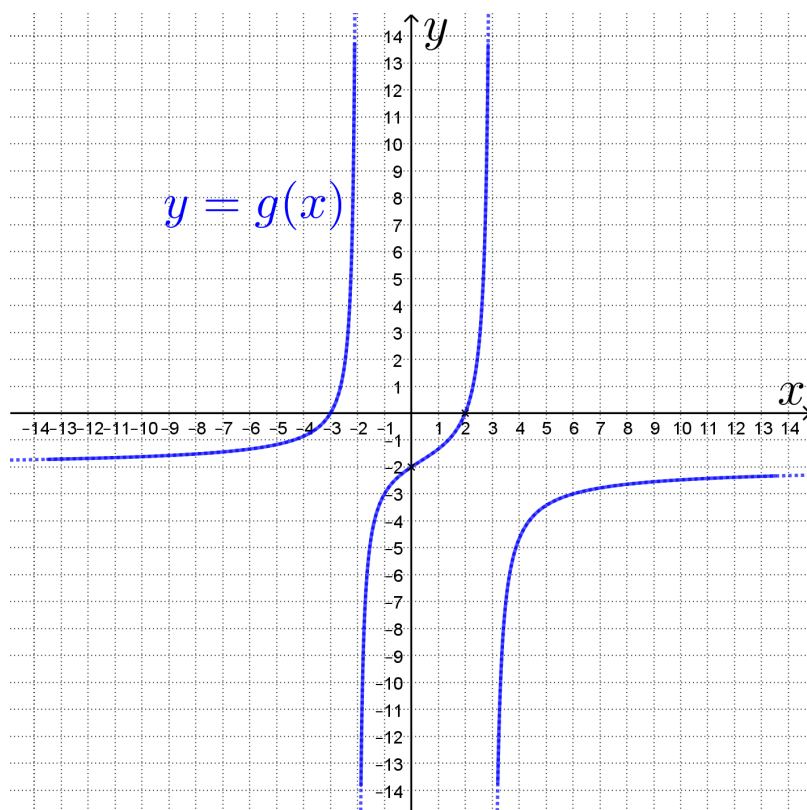
**Gruppgemensamt svar:**

$$g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

---

**Question 7:**

Uppgifterna 7 - 10 handlar huvudsakligen om kopplingen mellan funktioners egenskaper och formler.



Skissen ovan visar grafen till funktionen  $g$ . Använd grafen för att bestämma funktionsformeln för  $g$ .

- Använd GeoGebra för att kontrollera om ni har kommit fram till rätt formel, innan ni matar in den som svar på uppgiften.

**Gruppgemensamt svar:**

$$g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

Använd "Verify"-knappen nedan, för att kolla om ert svar är korrekt. Om svaret inte stämmer så får ni lite tips och en ny chans att svara på uppgiften.

**OBS:** Efter ni har tryckt på "Verify"-knappen går svaret inte att ändra!

Det verkar inte som ert svar stämmer.

Följande är en tyst inspelning. Den illustrerar hur asymptoterna används för att utforma funktionen.

0:00 / 2:48

---

Gör nu ett nytt försök att använda grafen till  $g$  (högst upp på sidan) för att bestämma funktionsformeln för  $g$ .

**Gruppgemensamt svar:**

$$g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

---

**Question 8:**

Ange två olika funktioner,  $f$  och  $g$ , som båda har

- två lodräta asymptoter  $x = -1$  och  $x = 2$ , samt
- en vågrät asymptot  $y = -2$ .

- **OBS!** Ni har (troligtvis) fått olika asymptoter.
- Testa i GeoGebra om funktionerna i svarsförslagen verkligen har de givna asymptoterna.

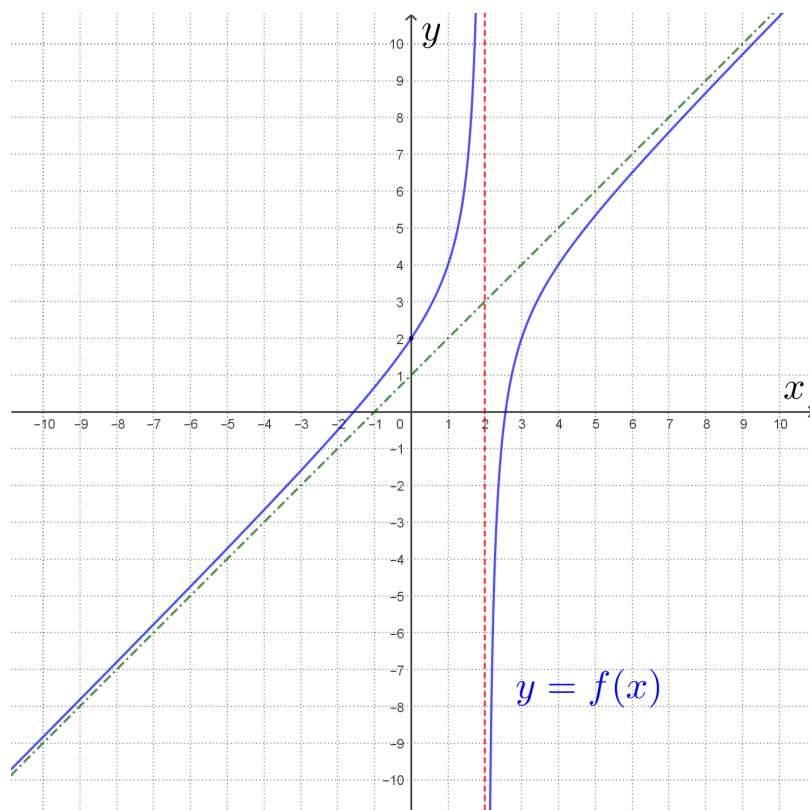
**Enskilda svar:**

$$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

---

Question 9:



Skissen ovan visar grafen till funktionen  $f$  samt dess asymptoter. Använd grafen för att bestämma funktionsformeln för  $f$ .

- Använd GeoGebra för att kontrollera om ni har kommit fram till rätt formel, innan ni matar in den som svar på uppgiften.

Gruppgemensamt svar:

$$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

Använd "Verify"-knappen nedan, för att kolla om ert svar är korrekt. Om svaret är fel så får ni lite tips om liknande innehåll. Därefter får ni en ny chans att svara på uppgiften.

**OBS:** Efter ni har tryckt på "Verify"-knappen går svaret inte att ändra!

Det verkar inte som ert svar stämmer.

Följande är en tyst inspelning. Den illustrerar hur asymptoter används för att utforma en annan funktion.

0:00 / 2:21

---

*Gör nu ett nytt försök att använda grafen till  $f$  (högst upp på sidan) för att bestämma funktionsformeln för  $f$ .*

**Gruppgemensamt svar:**

$$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

---

---

**Question 10:**

*Ange två olika funktioner,  $f$  och  $g$ , som båda har*

- en lodrät asymptot  $x = -1$ , och*
- en sned asymptot  $y = -5x + 2$ .*

- **OBS!** *Ni har (troligtvis) fått olika asymptoter.*
- *Testa i GeoGebra om funktionerna i svarsförslagen verkligen har de givna asymptoterna.*

**Enskilda svar:**

$f(x) =$  \_\_\_\_\_

$g(x) =$  \_\_\_\_\_

---

---